

Clase 13¹ - MOSFET (III)

MODELO EQUIVALENTE DE PEQUEÑA SEÑAL

Contenido:

1. Introducción a la modelización del MOSFET
2. Modelo de pequeña señal para baja frecuencia
3. Modelo de pequeña señal para alta frecuencia
4. Apéndice: Modelos de SPICE

Lectura recomendada:

- Müller, Kamins, “Device Electronics for Integrated Circuits”, Ch. 9, §§9.1.
- Pedro Julian, “Introducción a la Microelectronica”, Ch. 5, §§5.3–5.5.
- Howe, Sodini, “Microelectronics: An Integrated Approach”, Ch. 4, §§4.5–4.6.

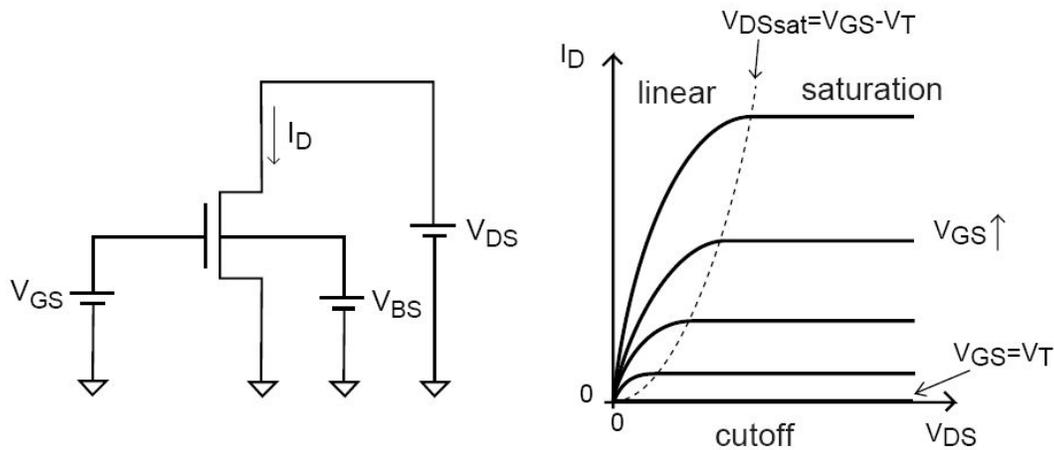
¹Esta clase es una adaptación hecha por los docentes del curso “Dispositivos Semiconductores” de la FIUBA, de la correspondiente hecha por el prof. Jesús A. de Alamo para el curso “6.012 - Microelectronic Devices and Circuits” del MIT. Cualquier error debe adjudicarse a la traducción.

Preguntas disparadoras:

- ¿Por qué necesitamos modelizar el MOSFET?
- ¿Cuál es la topología del circuito eléctrico del modelo de pequeña señal del MOSFET?
- ¿Cuales son las principales dependencias de los elementos fundamentales del modelo de pequeña señal para saturación?

1. Introducción: necesidad de un modelo de pequeña señal

Hasta ahora tenemos un modelo del MOSFET que nos permite calcular la corriente de Drain en función de las tensiones aplicadas en cada terminal.



- *Corte o Cut-off:*

$$I_D = 0$$

- *Lineal o triodo:*

$$I_D = \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} \left(V_{GS} - \frac{V_{DS}}{2} - V_T \right) V_{DS} (1 + \lambda V_{DS})$$

- *Saturación:*

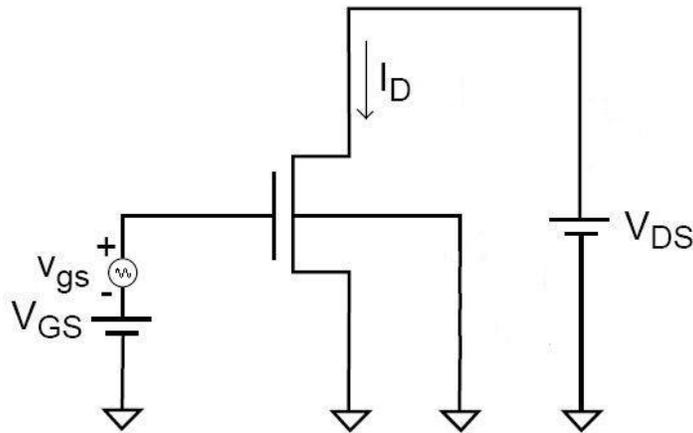
$$I_D = \frac{1}{2} \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T)^2 (1 + \lambda V_{DS})$$

Efecto del Back bias:

$$V_T(V_{BS}) = V_{T0} + \gamma \left(\sqrt{-2\phi_p - V_{BS}} - \sqrt{-2\phi_p} \right)$$

Tensiones dependientes del tiempo

A continuación estudiaremos qué pasa si tenemos una señales que varían en el tiempo. Por ejemplo:



Suponiendo que el MOSFET está en saturación resulta:

$$i_D = k \left((V_{GS} + v_{gs} \sin(\omega t)) - V_T \right)^2$$

Con: $k = \frac{1}{2} \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox}$.

Obtenemos una ecuación que puede ser resuelta por una computadora, pero que no es práctica para cálculos a mano.

Linealización

Desarrollamos $i_D(v_{GS})$ en serie de Taylor:

$$i_D(V_{GS} + v_{gs}) = i_D(V_{GS}) + \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \right|_Q \cdot v_{gs} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 i_D}{\partial v_{GS}^2} \right|_Q \cdot v_{gs}^2$$

Evaluando las derivadas para régimen de saturación:

$$i_D(v_{GS}) = k(V_{GS} - V_T)^2 + 2k(V_{GS} - V_T) \cdot v_{gs} + k \cdot v_{gs}^2$$

El modelo linealizado en saturación resulta:

$$i_D(v_{GS}) \simeq \frac{1}{2} \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T)^2 + \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T) v_{gs}$$

$$i_D(v_{GS}) \simeq I_D + g_m(V_{GS}) \cdot v_{gs}$$

donde definimos la *transconductancia* del MOSFET g_m [S] como:

$$g_m = \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \right|_Q = \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T)$$

Veamos mediante un ejemplo cómo funciona esta idea:

Para $V_{GS} = 2\text{ V}$, $V_T = 1.5\text{ V}$, $\frac{1}{2} \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} = 1\text{ mA/V}^2$,
 $v_{gs} = 0.1\text{ V} \sin(\omega t)$, con $\omega = 2\pi \cdot 1\text{ kHz}$ y V_{DS} tal que
 estamos en saturación,

- Tenemos por un lado el modelo “completo”:

$$i_D(v_{GS}) = \frac{1}{2} \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} ((V_{GS} + v_{gs}) - V_T)^2$$

$$i_D(v_{GS}) = 1\text{ mA/V}^2 \cdot ((2\text{ V} + 0.1\text{ V} \sin(\omega t)) - 1.5\text{ V})^2$$

- Y por otro el modelo aproximado para “pequeña señal”:

$$i_D(v_{GS}) = I_D + g_m v_{gs}$$

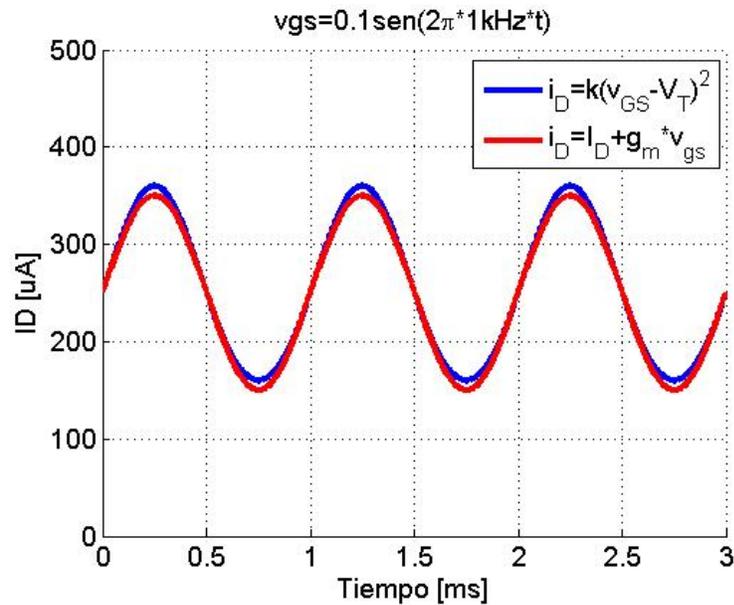
$$I_D = \frac{W}{2L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T)^2 = 250\text{ }\mu\text{A}$$

$$g_m = \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T) = 1\text{ mS}$$

$$i_D(v_{GS}) = 250\text{ }\mu\text{A} + 1\text{ mS} \cdot 0.1\text{ V} \sin(\omega t)$$

¿Podemos usar el modelo aproximado? ¿Es útil?

Comparemos los resultados obtenidos con el “modelo completo” y con el “modelo aproximado”:

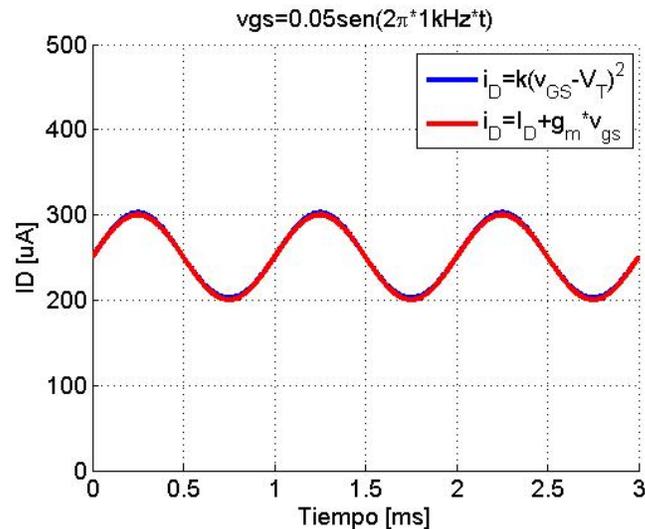


Para $v_{gs} = 100$ mV los resultados son parecidos.

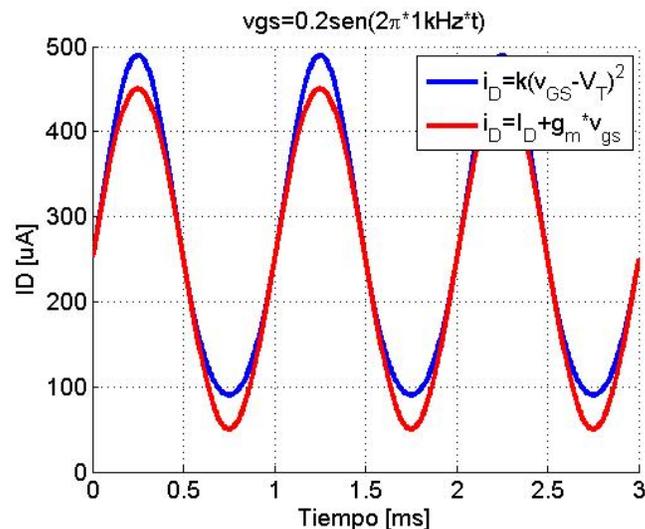
El modelo linealizado es sencillo y nos permite realizar cálculos a mano, de forma rápida identificando los aspectos importantes en el diseño de un circuito.

Observemos que ocurre si dejamos los demás parámetros constantes y cambiamos la amplitud v_{gs} :

- Para $v_{gs} = 50$ mV la aproximación es excelente:



- Para $v_{gs} = 200$ mV la aproximación es mala



Esto ocurre porque estamos haciendo Taylor en el entorno de V_{GS} .

Rango de validez del modelo linealizado

Si aceptamos un 10% de error en la linealización:

$$k \cdot v_{gs}^2 < 0,1 \cdot 2k (V_{GS} - V_T) \cdot v_{gs}$$

o sea,

$$v_{gs} < 0.2 (V_{GS} - V_T)$$

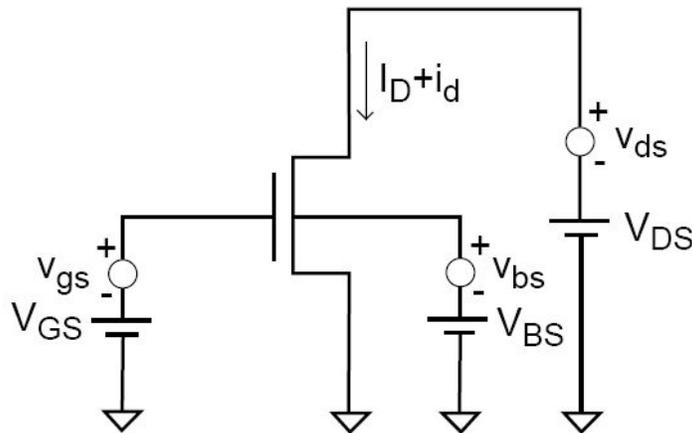
Ejemplo:

Si $V_{GS} = 2 \text{ V}$ y $V_T = 1.5 \text{ V}$, resulta $v_{gs} \leq 100 \text{ mV}$.

Si $V_{GS} = 3 \text{ V}$ y $V_T = 1.5 \text{ V}$, resulta $v_{gs} \leq 300 \text{ mV}$.

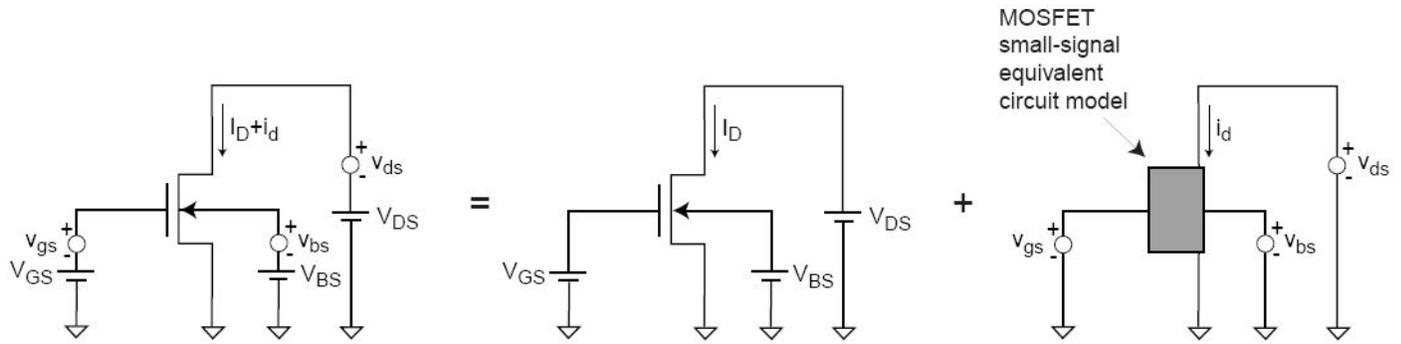
2. Modelo de pequeña señal del MOSFET en baja frecuencia

Generalizamos la idea de linealización para señales aplicadas sobre cualquiera de las fuentes de polarización:



Puntos fundamentales:

- Podemos separar la respuesta del dispositivo a la polarización y a la pequeña señal.
- Las señales son *pequeñas*
 - ⇒ la respuesta de los dispositivos es aprox. lineal
 - ⇒ se puede usar el *principio de superposición*
 - ⇒ los efectos de diferentes señales son independientes.



Matemáticamente:

$$i_D(V_{GS} + v_{gs}, V_{DS} + v_{ds}, V_{BS} + v_{bs}) \simeq I_D(V_{GS}, V_{DS}, V_{BS}) + \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \right|_Q v_{gs} + \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \right|_Q v_{ds} + \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{BS}} \right|_Q v_{bs}$$

Donde $Q \equiv$ punto de polarización (V_{GS}, V_{DS}, V_{BS}).

Corriente i_d de pequeña señal:

$$i_d \simeq g_m v_{gs} + g_o v_{ds} + g_{mb} v_{bs}$$

Definimos:

$$g_m \equiv \text{transconductancia [S]}$$

$$g_o \equiv \text{salida o conductancia del drain [S]}$$

$$g_{mb} \equiv \text{transconductancia del backgate [S]}$$

Luego:

$$g_m \simeq \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \right|_Q \quad g_o \simeq \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \right|_Q \quad g_{mb} \simeq \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{BS}} \right|_Q$$

□ Transconductancia

En regimen de saturación:

$$i_D = \frac{1}{2} \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (v_{GS} - V_T)^2 (1 + \lambda v_{DS})$$

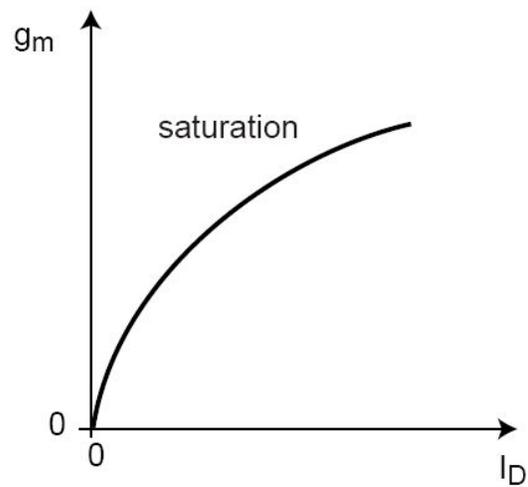
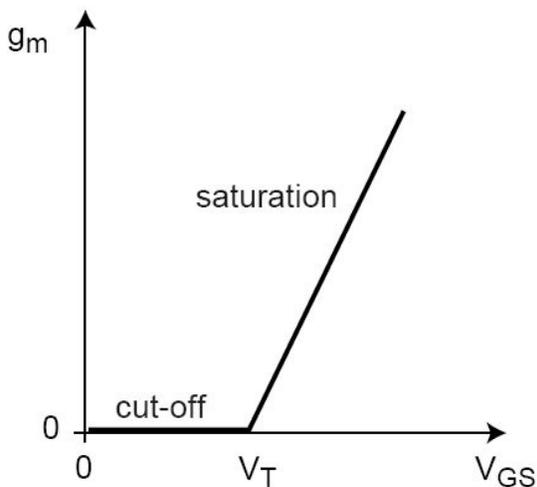
Luego:

$$g_m = \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \right|_Q = \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T) [1 + \lambda V_{DS}]$$

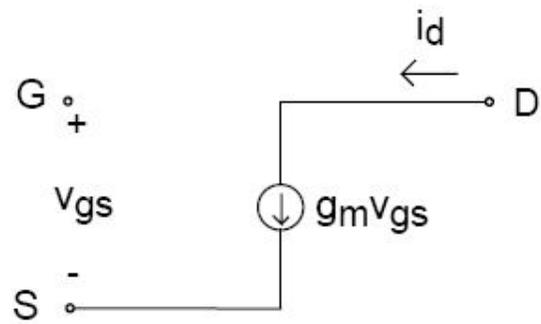
$$g_m \simeq \underbrace{\frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T)}_{\text{(despreciando EMLC)}}$$

Lo reescribimos en términos de I_D :

$$g_m = \sqrt{2 \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} I_D}$$



Modelo circuital equivalente de g_m :



B .

□ Conductancia de salida

En regimen de saturación:

$$I_D = \frac{1}{2} \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T)^2 (1 + \lambda V_{DS})$$

Luego:

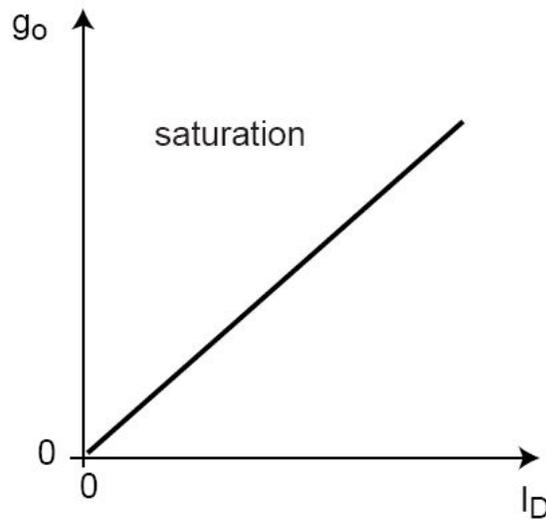
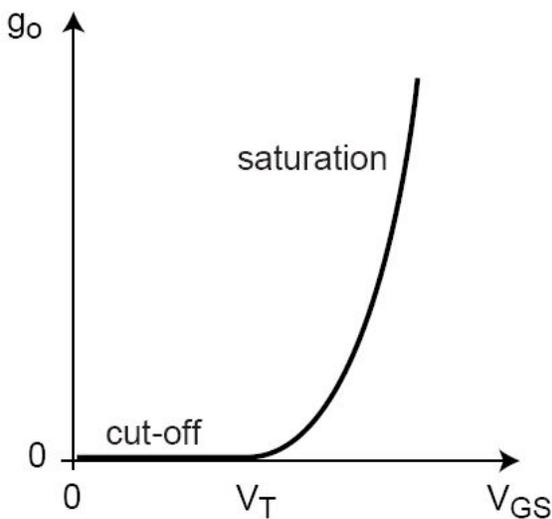
$$g_o = \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \right|_Q = \frac{1}{2} \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T)^2 \lambda = I_{D(sat)} \lambda \propto \frac{I_{D(sat)}}{L}$$

$$g_o \simeq I_D \lambda \propto \frac{I_D}{L}$$

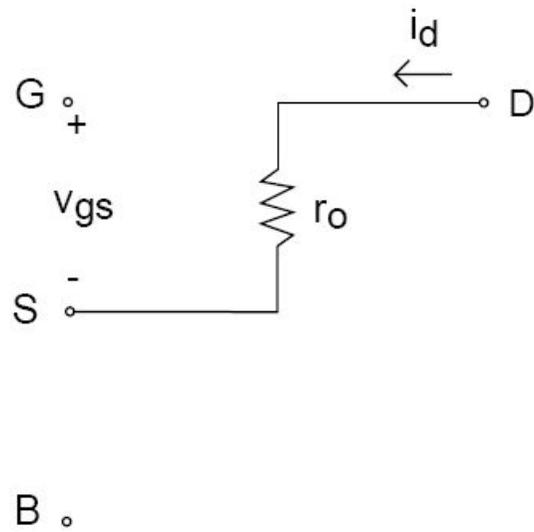
despreciano EMLC en la polarización

La resistencia de salida es:

$$r_o = \frac{1}{g_o} \propto \frac{L}{I_D}$$



Modelo circuital equivalente de g_o :



□ Transconductancia de Backgate

En régimen de saturación (despreciando la modulación del canal):

$$i_D \simeq \frac{1}{2} \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (v_{GS} - V_T(v_{BS}))^2$$

Luego:

$$g_{mb} = \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{BS}} \right|_Q = \frac{W}{L} \mu_n C'_{ox} (V_{GS} - V_T) \left(- \left. \frac{\partial V_T}{\partial v_{BS}} \right|_Q \right)$$

$$g_{mb} = g_m \left(- \left. \frac{\partial V_T}{\partial v_{BS}} \right|_Q \right)$$

Dado que:

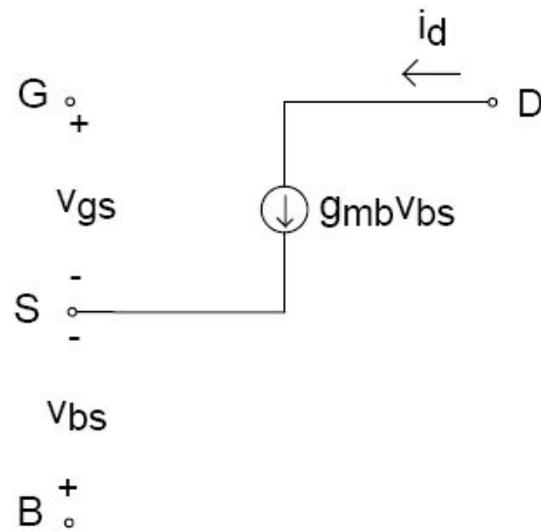
$$V_T(v_{BS}) = V_{T0} + \gamma (\sqrt{-2\phi_p - v_{BS}} - \sqrt{-2\phi_p})$$

Resulta:

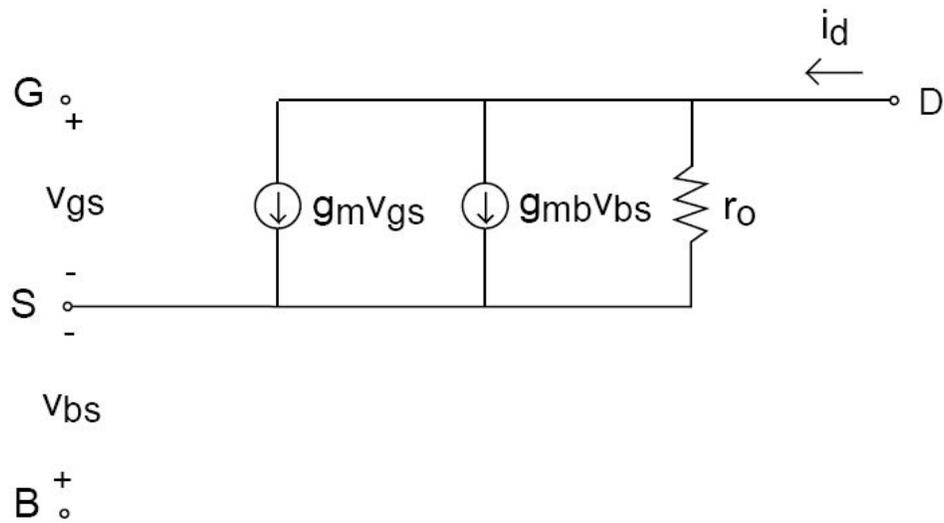
$$g_{mb} = \frac{\gamma g_m}{2\sqrt{-2\phi_p - V_{BS}}}$$

g_{mb} hereda las dependencias de g_m

Modelo circuital equivalente de g_{mb} :

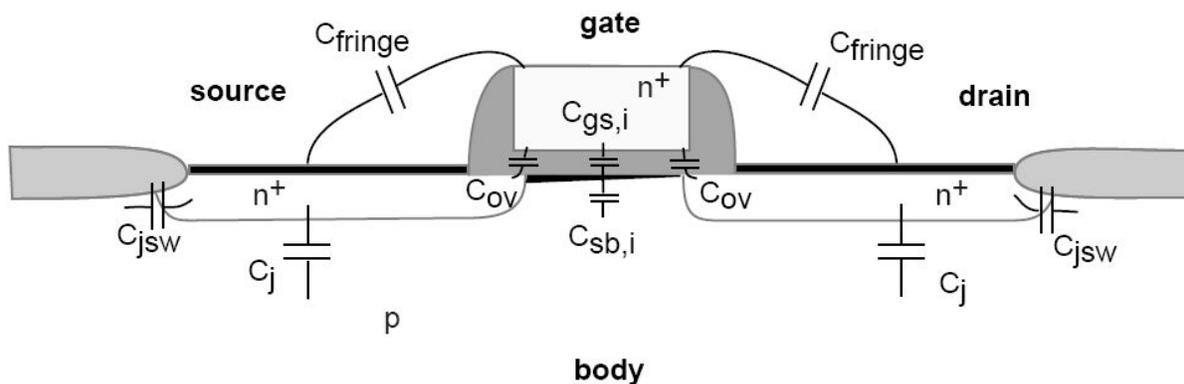


Modelo completo del MOSFET para pequeña señal a baja frecuencia:



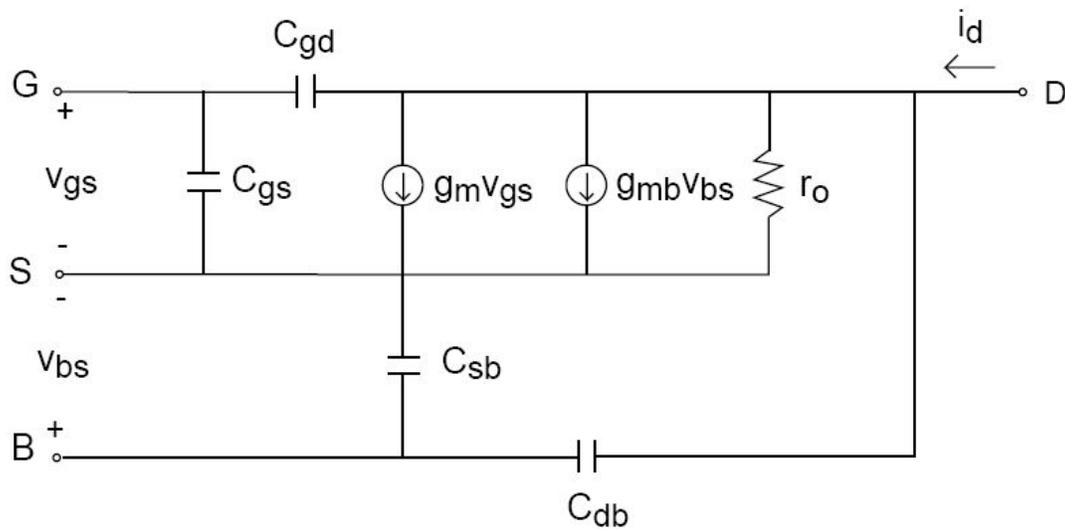
3. Modelo de pequeña señal del MOSFET en alta frecuencia

Las capacidades parásitas del MOSFET limitan su respuesta dinámica y en frecuencia. El régimen más importante para aplicaciones analógicas es el de saturación. A continuación estudiaremos los efectos capacitivos del MOSFET en este régimen.



- $C_{gs} \equiv$ capacidad Gate contra canal de inversión (i) + capacidad de overlap, C_{ov}
- $C_{gd} \equiv$ capacidad de overlap, C_{ov}
- $C_{gb} \equiv$ (sólo capacidades parásitas)
- $C_{sb} \equiv$ capacidad zona vaciamiento Source
- $C_{db} \equiv$ capacidad zona vaciamiento Drain

Modelo de pequeña señal del MOSFET para alta frecuencia:



Plan para obtener las capacidades del modelo:

- Empezamos con $C_{gs,i}$
 - Calculamos la carga del Gate Q_G
 - Calculamos la derivada de Q_G con V_{GS}
- Sumamos las capacidades C_j de las junturas PN

Capacidad de Gate

□ Cálculo de $C_{gs,i}$

$$Q_G = -(Q_N + Q_B)$$

Dónde:

$$Q_N(V_{GS}) = W \int_0^L Q'_n(y) dy = W \int_0^{V_{GS}-V_T} Q'_n(V_c) \frac{dy}{dV_c} dV_c$$

Siendo:

$$\frac{dV_c}{dy} = -E_y(y) = -\frac{I_D}{W \mu_n Q_n(V_c)}$$

Luego:

$$Q_N(V_{GS}) = -\frac{W^2 \mu_n}{I_D} \int_0^{V_{GS}-V_T} Q_n'^2(V_c) dV_c$$

Recordando:

$$Q'_n(V_c) = -C'_{ox}(V_{GS} - V_c - V_T)$$

Entonces:

$$Q_N(V_{GS}) = -\frac{W^2 \mu_n C_{ox}'^2}{I_D} \int_0^{V_{GS}-V_T} (V_{GS} - V_c - V_T)^2 dV_c$$

Integramos y sustituimos I_D para saturación:

$$Q_N(V_{GS}) = -\frac{2}{3} WL C'_{ox}(V_{GS} - V_T)$$

Observar que WL es el área del Gate del MOSFET.

La carga en el Gate es:

$$Q_G(V_{GS}) = \frac{2}{3} WL C'_{ox}(V_{GS} - V_T) - Q_B$$

Siendo Q_B independiente de V_{GS} , la capacidad Gate-Source debido a la capa de inversión (i) es:

$$C_{gs,i} = \frac{dQ_G}{dV_{GS}} = \frac{2}{3} WL C'_{ox}$$

□ Para tener C_{gs} debemos incluir la capacidad de overlap:

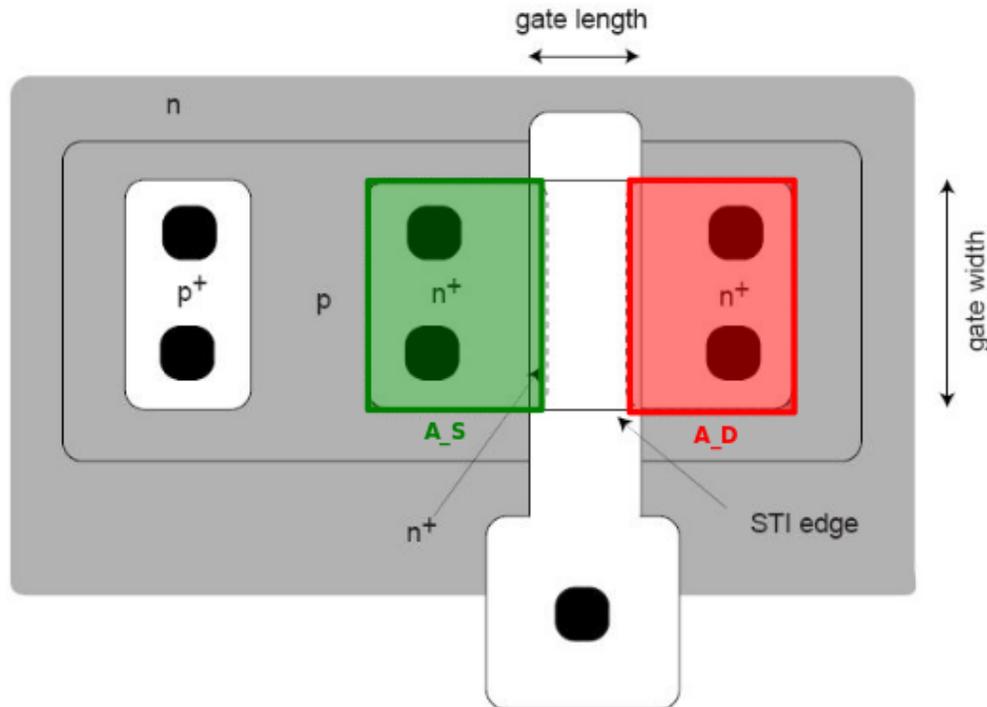
$$C_{gs} = \frac{2}{3} WL C'_{ox} + W C_{ov}$$

C_{ov} es un parámetro provisto por el fabricante y suele estar expresado en unidades de capacidad/longitud.

□ Capacidad Gate-Drain C_{gd} es la capacidad de overlap:

$$C_{gd} = W C_{ov}$$

Capacidades de juntura



□ Capacidad Body-Source: es el producto de la capacidad de juntura y el área del Source,

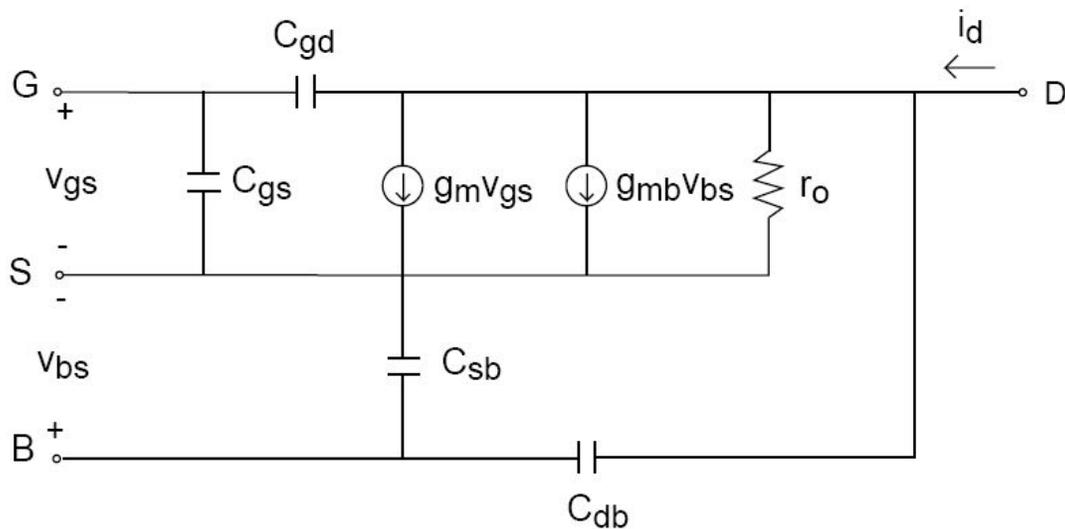
$$C_{sb} = C'_j A_S$$

□ Capacidad Body-Drain: es el producto de la capacidad de juntura y el área del Drain,

$$C_{db} = C'_j A_D$$

Principales conclusiones

Modelo de pequeña señal del MOSFET para alta frecuencia:



En saturación:

$$g_m \propto \sqrt{\frac{W}{L} I_D}$$

$$g_o \propto \frac{I_D}{L}$$

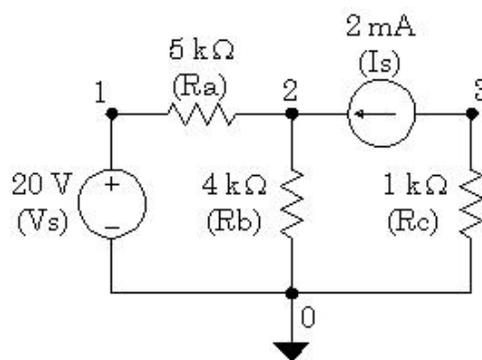
$$C_{gs} \propto W L C'_{ox}$$

4. Apéndice: Modelos de SPICE

SPICE es el acrónimo de *Simulation Program with Integrated Circuits Emphasis* y fue desarrollado por la Universidad de California, en Berkeley, en 1975.

Es un estándar de simulación de circuitos electrónicos.

Realizar una simulación requiere describir el circuito y elegir el tipo de simulación (punto de operación, temporal, respuesta en frecuencia, ruido, temperatura, etc.).



Netlist y comandos de simulación:

```
Vs 1 0 DC 20.0V ; Se indica la fuente
```

```
Ra 1 2 5.0k
```

```
Rb 2 0 4.0k
```

```
Rc 3 0 1.0k
```

```
Is 3 2 DC 2.0mA
```

```
.DC Vs 20 20 1 ; Se pide simulación DC
```

```
.PRINT DC V(1,2) I(Ra) ; Calculo V,I para Ra
```

```
.PRINT DC V(2) I(Rb)
.END
```

Y se obtiene un resultado como este:

```
**** DC TRANSFER CURVES
Vs V(1,2) I(Ra)
20 6.667 1.333E-03
Vs V(2) I(Rb)
20 13.33 3.333E-03
JOB CONCLUDED
TOTAL JOB TIME .13
```

Hoy en día hay muchas implementaciones de SPICE:

- Software no libre: LTSPICE (freeware), PSpice/OrCAD, HSpice, MicroCad, Dr. Spice, Proteus, etc.
- Software libre: ASCO tool, GEDA (GPL), MacSpice, Oregano (GPL), Qucs, TclSpice, etc.

Todas se basan en los mismos modelos de SPICE y cada una agrega su entorno visual y herramientas propias.

Modelos de MOSFETs en SPICE

Para MOSFETs con $L \geq 1.5 \mu\text{m}$ es adecuado el modelo elemental "Level 1" de SPICE:

Level 1 MOSFET model:

```
.MODEL MODN NMOS LEVEL=1 VTO=1 KP=50u
+ LAMBDA=.033 GAMMA=.6 PHI=0.8 TOX=1.5E-10
+ CGDO=5E-10 CGSO= 5e-10 CJ=1E-4 CJSW=5E-10
+ MJ=0.5 PB=0.95 W=5u L=1u
```

Por ejemplo, en Level 1 para calcular la corriente de Drain se usan las ecuaciones:

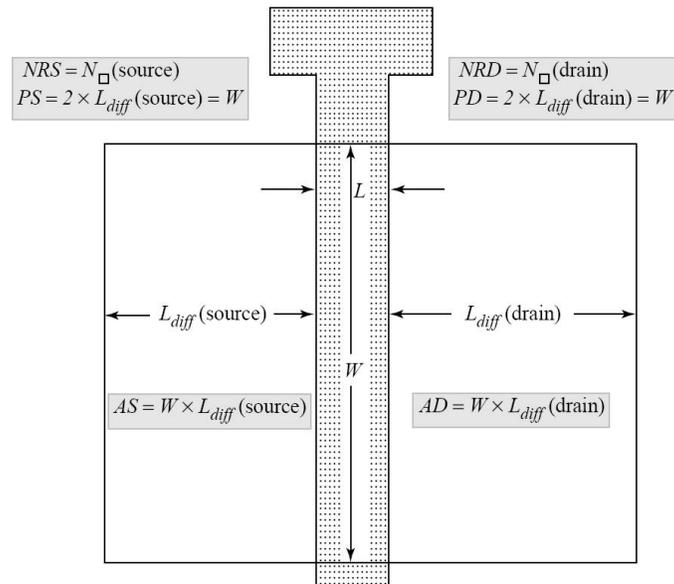
$$I_{DS} = 0 \quad (V_{GS} \leq -V_{TH})$$

$$I_{DS} = \frac{KP}{2}(W/L_{eff})V_{DS}[2(V_{GS}-V_{TH})-V_{DS}](1+LAMBDA \cdot V_{DS}) \quad (0 \leq V_{DS} \leq V_{GS}-V_{TH})$$

$$I_{DS} = \frac{KP}{2}(W/L_{eff})(V_{GS}-V_{TH})^2(1+LAMBDA \cdot V_{DS}) \quad (0 \leq V_{GS}-V_{TH} \leq V_{DS})$$

$$V_{TH} = V_{TO} + GAMMA(\sqrt{2 \cdot PHI - V_{BS}} - \sqrt{2 \cdot PHI})$$

Para calcular las capacidades el Level 1 usa por ejemplo:



Y las ecuaciones:

The diagram shows a cross-section of the drain region, labeled n^+ drain. It highlights the area AD and the perimeter PD of the junction. The equation for the drain capacitance $C_{BD}(V_{BD})$ is given by:

$$C_{BD}(V_{BD}) = \frac{CJ \cdot AD}{(1 - V_{BD}/PB)^{MJ}} + \frac{CJSW \cdot PD}{(1 - V_{BD}/PB)^{MJSW}}$$

where AD is the area and PD is the perimeter.

La primer generación de modelos de MOSFETs están basados en modelos similares a los presentados en esta materia e incluyen: Level 1 a 3.

Existe una segunda generación llamada BSIM (Berkeley Short-Channel IGFET Model) que contempla un número mayor de parámetros físicos y empíricos. Esto permite lograr mayor precisión y velocidad. Los modelos BSIM suelen utilizarse para MOSFETs sub- μm .

Ejemplo: Modelo de n-MOSFET para una tecnología CMOS de $L_{min} = 0.35 \mu\text{m}$ en Level 8 (BSIM3):

```
.MODEL CMOSN NMOS (
+LEVEL = 49          acm = 3          hdif = 0.5e-6
+VERSION = 3.1       TNOM = 27         TOX = 7.7E-9
+XJ = 1E-7          NCH = 2.3579E17    VTH0 = 0.5048265
+K1 = 0.5542796     K2 = 0.0155863    K3 = 2.3475646
+K3B = -3.3142916   W0 = 4.145888E-5  NLX = 1.430868E-7
+DVT0W = 0          DVT1W = 0         DVT2W = 0
+DVT0 = -0.0150839 DVT1 = 1.51022E-3 DVT2 = 0.170688
+U0 = 415.8570638   UA = 5.057324E-11 UB = 1.496793E-18
+UC = 2.986268E-11 VSAT = 1.237033E5    A0 = 0.9098788
+AGS = 0.2120181   B0 = 1.683612E-6  B1 = 5E-6
+KETA = -4.011887E-4 A1 = 0            A2 = 1
+RDSW = 1.156967E3 PRWG = -8.468558E-3 PRWB = -7.678669E-3
+WR = 1             WINT = 5.621821E-8 LINT = 1.606205E-8
+XL = -2E-8         XW = 0            DWG = -6.450939E-9
+DWB = 6.530228E-9 VOFF = -0.1259348 NFACTOR = 0.3344887
+CIT = 0            CDSC = 1.527511E-3 CDSCD = 0
+CDSCB = 0          ETA0 = 1.21138E-3  ETAB = -1.520242E-4
+DSUB = 0.1259886  PCLM = 0.8254768  PDIBLC1 = 0.4211084
+PDIBLC2 = 6.081164E-3 PDIBLCB = -5.865856E-6 DROUT = 0.7022263
+PSCBE1 = 7.238634E9 PSCBE2 = 5E-10    PVAG = 0.6261655
+DELTA = 0.01      MOBMOD = 1        PRT = 0
+UTE = -1.5         KT1 = -0.11       KT1L = 0
+KT2 = 0.022       UA1 = 4.31E-9     UB1 = -7.61E-18
+UC1 = -5.6E-11    AT = 3.3E4        WL = 0
+WLN = 1           WW = -1.22182E-15 WVN = 1.137
+WWL = 0           LL = 0            LLN = 1
+LW = 0            LWN = 1           LWL = 0
+CAPMOD = 2        XPART = 0.4       CGDO = 1.96E-10
+CGSO = 1.96E-10   CGBO = 0          CJ = 8.829973E-4
+PB = 0.7946332    MJ = 0.3539285   CJSW = 2.992362E-10
+PBSW = 0.9890846 MJSW = 0.1871372 PVTH0 = -0.0148617
+PRDSW = -114.7860236 PK2 = -5.151187E-3 WKETA = 5.687313E-3
+LKETA = -0.018518 )
*
```